



Sèrie 1

Exercicis OPCIO A

A1.- Comproveu que l'equació $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ no té cap solució real.

Solució: Es tracta d'una equació biquadrada

$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -1, -2.$$

Com que les solucions obtingudes per a x^2 són negatives, l'equació no té cap solució real.

Puntuació: 0,5 per la resolució de la biquadrada i 0,5 per explicar per què no té solucions reals.

A2.- Calculeu el valor de p que impedeix que el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - py = 0 \end{cases}$ sigui compatible.

Solució: Si es fa per mitjà de determinants, en primer lloc cal trobar el valor de p que anul·la el determinant de la matriu de coeficients.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -p \end{vmatrix} = -p - 2 = 0 \rightarrow p = -2.$$

A continuació, cal veure com és el sistema quan $p = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{rang}(A) = 1, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{rang}(B) = 2.$$

El sistema és incompatible.

També es pot fer usant el mètode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -p & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -p-2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $p = -2$ la matriu de coeficients té rang 1 mentre que l'ampliada té rang 2 sigui quin sigui el valor de p .

Puntuació: 0,5 punts per trobar el valor de p i 0,5 per comprovar que el sistema és incompatible.

A3.- Calculeu una primitiva de la funció $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3$ ja que $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 1 punt.



A4.- Trobeu un vector no nul perpendicular a $(1,2,3)$.

Solució: Servirà qualsevol vector que multiplicat escalarment per $(1,2,3)$ doni com a resultat zero. Per exemple el $(2,-1,0)$, ja que $(1,2,3) \cdot (2,-1,0) = 2 - 2 + 0 = 0$.

Puntuació: 1 punt.

A5.- Trobeu els angles d'un triangle isòsceles sabent que el seu costat desigual fa $1 m$ i que l'altura perpendicular a aquest costat té una longitud de $2 m$.

Solució: Si α és un dels dos angles iguals es verifica que $\tan \alpha = \frac{2}{0,5} = 4 \rightarrow \alpha = 75,96^\circ$. Llavors, l'angle restant val $\beta = 180^\circ - 2\alpha = 28,08^\circ$.

Puntuació: 0,5 punts per cada un dels dos angles a determinar. Valoreu amb 0.5 si es fa un raonament correcte però la part de càlcul és errònia.



Exercicis OPCIO B

B1.- Calculeu el valor de x que compleix que $\log_x 4 = \frac{1}{2}$.

Solució: De la definició de logaritme, $x^{1/2} = 4 \rightarrow x = 16$.

Puntuació: 0.5 per l'aplicació correcta de la definició de logaritme i 0.5 per obtenir el valor correcte de la incògnita..

B2.- Indiqueu quin és el domini de la funció $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Solució: Com que el radicand no pot ser negatiu s'ha de complir que $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \rightarrow \text{Dom}(f) = [-2, 2]$.

Puntuació: 0.5 per indicar que el radicand ha de ser positiu i 0.5 pel domini.

B3.- Considereu la funció $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Fent ús de la seva derivada, determineu si creix o decreix quan $x = 2$.

Solució: $f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f'(2) < 0 \rightarrow$ la funció decreix. De fet, la derivada és negativa en tots els punts del domini de la funció i, per tant, és decreixent en tots ells.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada i 0,5 per argumentar correctament el sentit de la variació.

B4.- Trobeu les coordenades del punt de tall de les rectes $x + y = -1$ i $x - y = 7$.

Solució: Es troba resolent el sistema format per les dues equacions.

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = -4.$$

Puntuació: 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades de càlcul.

B5.- Escriviu l'equació del pla paral·lel al pla d'equació $x - 2y + z = 0$ que passa pel punt $(1, 2, -1)$.

Solució: $(x - 1) - 2(y - 2) + (z + 1) = 0$.

Puntuació: 1 punt. Si l'equació està malament però el vector normal és el correcte 0,5 punts.



Problema 1.- Tres associacions culturals A, B i C han adquirit entrades de diversos preus per a un concert a l'auditori local. En la taula següent es recullen les quantitats d'entrades comprades segons la situació de les localitats a la sala, i els imports totals pagats per cada entitat. Calculeu el preu de l'entrada per a cada ubicació.

	A	B	C
Platea	12	10	6
Lateral	6	8	6
Llotja	4	6	2
Import total	860 €	940 €	520 €

Solució.- Si x és el preu d'una entrada de platea, y el d'una de lateral i z el de llotja, la situació descrita a l'enunciat es tradueix en el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 12x + 6y + 4z = 860 \\ 10x + 8y + 6z = 940 \\ 6x + 6y + 2z = 520 \end{cases}$$

Si al doble de la tercera es resta la primera s'obté

$$6y = 1040 - 860 = 180 \rightarrow y = 30 \text{ €.}$$

Restant la segona al triple de la tercera,

$$8x + 10y = 620 \rightarrow 8x = 320 \rightarrow x = 40 \text{ €.}$$

Finalment, substituint dins la tercera,

$$z = \frac{520 - 6 \cdot 40 - 6 \cdot 30}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ €.}$$

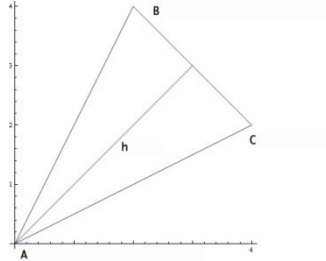
Puntuació.- 2 punts per plantejar un sistema d'equacions lineals d'acord amb l'enunciat i 3 punts per la seva resolució. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades.

Problema 2.- Considereu el triangle de vèrtexs $A(0,0)$, $B(2,4)$ i $C(4,2)$.

- Comproveu que és isòsceles.
- Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts B i C .
- Calculeu la longitud de l'altura que passa per A i l'àrea del triangle.



Solució:



- a) $AB = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ i és isòsceles ja que té dos costats de longituds iguals. Es pot donar per bona qualsevol consideració coherent de la simetria del triangle respecte de la bisectriu del primer quadrant.
- b) $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-4}{2-4} \rightarrow x-2 = -y+4 \rightarrow x+y = 6$.
- c) L'altura demanada és la longitud del segment que uneix A amb el punt mig del segment BC que té per coordenades $(3,3)$. Llavors, la base a considerar és la longitud de

$$BC. h = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, A = \frac{3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 6 u^2.$$

Puntuació: 1 punt per l'apartat a), 1 punt per l'apartat b) i 3 punts per l'apartat c) distribuïts de la manera següent. 1 punt pel càlcul de l'altura, 1 punt pel de la base i, finalment, 1 punt per l'àrea. Els descomptes per errades de càlcul queden a criteri del corrector.