SÈRIE 3

Criteris generals d'avaluació i qualificació

1. *Les respostes s'han d'ajustar a l'enunciat de la pregunta. Es valorarà sobretot que l'alumnat demostri que té clars els conceptes de caràcter físic sobre els quals tracta cada pregunta.*
2. *Es tindrà en compte la claredat en l'exposició dels conceptes, dels processos, dels passos a seguir, de les hipòtesis, l'ordre lògic, l'ús correcte dels termes científics i la conceptualització segons l'enunciat.*
3. *En les respostes cal que l'alumnat mostri una adequada capacitat de comprensió de les qüestions plantejades i organitzi de forma lògica la resposta, tot analitzant i utilitzant les variables en joc. També es valorarà el grau de pertinença de la resposta, el que l'alumnat diu i les mancances manifestes sobre el tema en qüestió.*
4. *Les respostes s'han de raonar i justificar. Un resultat erroni amb un raonament correcte es valorarà. Una resposta correcta sense raonament ni justificació es pot valorar amb un 0.*
5. *Un error no s'ha de penalitzar dues vegades en el mateix problema. Si un apartat necessita un resultat anterior, i aquest és erroni, cal valorar la resposta independentment del seu valor numèric, i tenir en compte el procediment de resolució.*
6. *Si la resolució presentada a l'examen és diferent però correcta i està d'acord amb els requeriments de l'enunciat, s'ha d'avaluar positivament encara que no coincideixi amb la resolució donada a la pauta de correcció*
7. *Un o més errors d'unitats o no posar-les (resultats intermedis i finals) en un problema es penalitzaran amb 0,25 punts en aquest problema.*
8. *Cal resoldre els exercicis fins al final i no es poden deixar indicades les operacions.*
9. *Cal fer la substitució numèrica en les expressions que s'utilitzen per resoldre les preguntes.*
10. *Un o més resultat amb un nombre molt elevat de xifres significatives (6 xifres significatives) o amb només una xifra significativa es penalitzarà amb 0,1p en aquest problema..*

EXERCICI 1

a)

0,5 p. L'energia potencial gravitatòria s'expressa així:

$$E_P = -G\,\frac{mM_M}{r} \Rightarrow r = -G\,\frac{mM_M}{E_P}$$

I, si substituïm pels tres valors de la taula, tenim:

Punt	Distància respecte del centre de Mercuri [m]	Energia potencial [J]
1	$-6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{2700 \cdot 3{,}285 \cdot 10^{23}}{-1{,}89 \cdot 10^{10}} = 3{,}13 \cdot 10^{6}$	$-1{,}89 \cdot 10^{10}$
2	$-6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{2700 \cdot 3{,}285 \cdot 10^{23}}{-1{,}35 \cdot 10^{10}} = 4{,}38 \cdot 10^{6}$	$-1{,}35 \cdot 10^{10}$

0,5 p. Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la *BepiColombo* degut a l'atracció de Mercuri és:

$$F = G\,\frac{mM_M}{r^2}$$

I la relació entre la força i la intensitat del camp gravitatori és:

$$F = mg$$

Per tant, la intensitat del camp gravitatori és:

$$g = G\,\frac{M_M}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{G\frac{M_M}{g}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{3{,}285 \cdot 10^{23}}{3{,}23}} = 2{,}60 \cdot 10^{6}\ \text{m}$$

0,25 p. I l'alçada sobre la superfície és:

$$h = r - R_M = 2{,}60 \cdot 10^{6} - 2{,}44 \cdot 10^{6} = 1{,}64 \cdot 10^{5}\ \text{m} = 164\ \text{km}$$

b)

0,75 p. Les distàncies al punt més proper (periastre) i al més allunyat (apoastre) es poden calcular directament a partir de les altures:

$$r_A = (11.600 + 2{,}44 \cdot 10^{3}\ ) \cdot 10^{3} = 1{,}404 \cdot 10^{7}\ \text{m}$$
$$r_P = (590 + 2{,}44 \cdot 10^{3}\ ) \cdot 10^{3} = 3{,}03 \cdot 10^{6}\ \text{m}$$

El moment angular s'expressa així:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

En què $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del centre de Mercuri a *Mio* i $\vec{v}$ és la velocitat de *Mio*. El mòdul del moment angular s'expressa així:

$$L = m\ r\ v\ sin\theta$$

En què θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com al periastre i a l'apoastre, $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perependiculars: $\theta = \pi/2$ i $sin\theta = 1$.
Per tant, si imposem la conservació del moment angular entre el periastre i l'apoastre, tenim:

$$m\,r_P\,v_P = m\,r_A\,v_A \Rightarrow v_P = v_A\frac{r_A}{r_P} = 2{,}64 \cdot 10^{3}\,\frac{1{,}404 \cdot 10^{7}}{3{,}03 \cdot 10^{6}} = 1{,}22 \cdot 10^{4}\ \text{m/s}.$$

0,5 p. El mòdul de l'acceleració normal és: $a = \frac{v^2}{r}$

En una òrbita el·líptica, com que el mòdul de la velocitat canvia en els diferents punts de l'òrbita, i també varia la distància entre l'òrbita i el planeta, també canviarà el valor de l'acceleració normal.

A partir del principi de conservació del moment angular, hem vist que la velocitat del satèl·lit serà màxima en el punt més proper al planeta (punt P). Aquest punt també correspon a la distància mínima entre el satèl·lit i el planeta. Com que l'acceleració normal és $a = \frac{v^2}{r}$, al punt P, v és màxima i r és mínima; llavors l'acceleració normal prendrà el seu valor màxim.

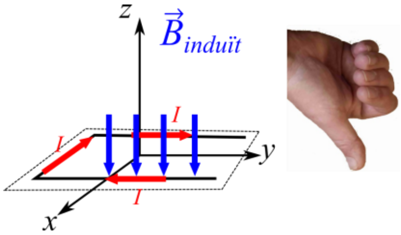
EXERCICI 2, opció 1

a)

0,25 p. Flux inicial:

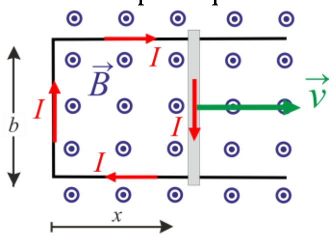
$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S = B \cdot b \cdot x = 0{,}4 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}03 = 4{,}80 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$$

0,5 p. Tal com es pot veure a la figura, el corrent induït en el circuit gira en sentit horari. Aplicant la regla de la mà dreta, veiem que aquest corrent induït genera un camp magnètic induït cap a dins del paper (és a dir, té el sentit contrari que el camp magnètic extern).



A partir de la llei de Lenz, sabem que el corrent induït crea un camp magnètic induït que s'oposa a la variació de flux magnètic.

Per tant, podem deduir que el moviment de la vareta ha de ser tal que el flux magnètic degut al camp magnètic extern augmenti. Això implica que la vareta s'està movent cap a la dreta:



0,5 p. Flux magnètic:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S = B \cdot b \cdot x = B \cdot b \cdot (x_0 + vt)$$

FEM induïda:

$$\varepsilon = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = B \cdot b \cdot v = 4{,}80 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

b)
0,5 p. La llei de Lorentz indica que apareix una força magnètica sobre les càrregues en moviment, perpendicular a la velocitat de les càrregues i al camp magnètic.
En el cas dels fils conductors, la força sobre un fil de longitud l pel qual circula una intensitat I és la següent:

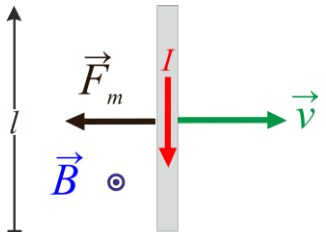
$$\vec{F}_m = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

En el cas descrit en l'enunciat, la vareta i el camp magnètic són perpendiculars, com s'indica a la figura. Per tant, apareixerà una força magnètica sobre la vareta.

0,5 p. Com que són perpendiculars, el mòdul de la força s'expressa així:

$$F_m = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(90) = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}4 \cdot 1 = 9{,}60 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

0,25 p. Dibuix de la força magnètica, perpendicular a $\vec{l}$ i $\vec{B}$ i segons la regla de la mà dreta en el sentit indicat a la figura:



També es pot justificar el sentit de la força a partir de la llei de Lenz. Com que s'oposa al canvi i la vareta es desplaça cap a la dreta, la força tindrà el sentit oposat, és a dir, cap a l'esquerra.

EXERCICI 2, opció 2
a)
0,5 p. Segons la llei de Coulomb, el mòdul de la força sobre l'electró degut a l'atracció del protó és:

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2}$$

La segona llei de Newton estableix que $\vec{F} = m\vec{a}$.
D'altra banda, considerant que la trajectòria és circular, la seva acceleració és l'acceleració centrípeta, $a = v^2/r$:

$$k\frac{e^2}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \Rightarrow m \cdot v^2 = k\frac{e^2}{r}$$

De l'anterior expressió, podem obtenir-ne la velocitat:

$$v = e\sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}$$

0,25 p. El moment angular s'expressa així:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

En què $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del protó a l'electró. El mòdul del moment angular s'expressa així:

$$L = m\, r\, v\, sin\theta$$

En què θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com que la òrbita és circular, $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perependiculars, $\theta = \pi/2$ i $sin\theta = 1$.
Per tant:

$$L = m \cdot r \cdot v = m \cdot r \cdot e\sqrt{\frac{k}{m \cdot r}} = e\sqrt{k \cdot m \cdot r}$$

0,25 p. Si fem servir l'expressió $L = \frac{n \cdot h}{2\pi}$:

$$\frac{n \cdot h}{2\pi} = e\sqrt{k \cdot m \cdot r} \Rightarrow r = \frac{1}{k \cdot m}\left(\frac{n \cdot h}{2\pi \cdot e}\right)^2$$

Alternativament, es pot plantejar $L = m \cdot r \cdot v = \frac{n \cdot h}{2\pi}$ i $v = e\sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}$.

0,25 p. I el radi per a $n = 1$ és:

$$r = \frac{1}{k \cdot m}\left(\frac{n \cdot h}{2\pi \cdot e}\right)^2 = \frac{1}{8{,}99 \cdot 10^9 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}\right)^2 = 5{,}30 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

b)
De l'apartat anterior, tenim:

$$v = e\sqrt{\frac{k}{m \cdot r}} = 2{,}18\ \cdot 10^6\ \text{m/s}$$

Alternativament: $L = e\sqrt{k \cdot m \cdot r} = 1{,}055\ \cdot 10^{-34}\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \Rightarrow v = \frac{L}{m \cdot r} = 2{,}18\ \cdot 10^6\ \text{m/s}$ o $L = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055\ \cdot 10^{-34}\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \Rightarrow v = \frac{L}{m \cdot r} = 2{,}18\ \cdot 10^6\ \text{m/s}$

0,5 p. I l'energia cinètica és:

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (2{,}18\ \cdot 10^6)^2 = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

0,5 p. L'energia potencial s'expressa així:

$$E_p = -k\frac{e^2}{r} = -8{,}99 \cdot 10^9\frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{5{,}3 \cdot 10^{-11}} = -4{,}35 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

0,25 p. I l'energia mecànica:

$$E_m = E_c + E_p = 2{,}18 \cdot 10^{-18} - 4{,}35 \cdot 10^{-18} = -2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

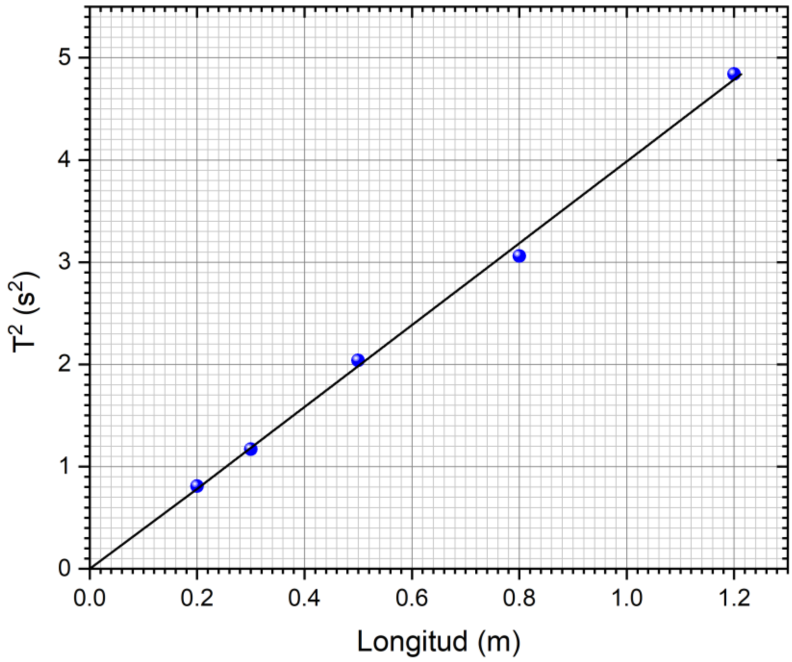
EXERCICI 3, opció 1

a)

0,15 p. Emplenar la taula:

Longitud L (m)	0,20	0,30	0,50	0,80	1,20
Període T (s)	0,90	1,08	1,43	1,75	2,20
T^2 (s^2)	0,81	1,17	2,04	3,06	4,84

0,5 p. Representació gràfica correctament escalada, amb títols i unitats:



0,3 p. A partir de l'expressió del període del pèndol, tenim:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

Podem comprovar, doncs, que T^2 és proporcional a L, ja que $\frac{4\pi^2}{g}$ és constant, per tant, la representació de T^2 en funció de L ha de ser una recta que passa per l'origen.

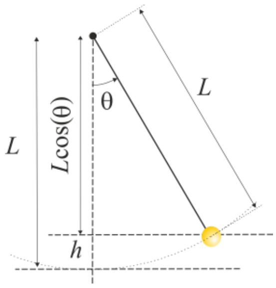
0,15 p. El pendent és aproximadament:

$$m = \frac{4{,}8}{1{,}2} = 4{,}00\ \mathrm{s^2/m}$$

0,15 p. A partir de l'expressió anterior, sabem que el pendent és:

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{4} = 9{,}87\ \mathrm{m/s^2}$$

b)



0,5 p. A partir de la representació, podem veure que l'alçària h és:

$$h = L(1 - \cos(\theta)) = 1(1 - \cos(30^o)) = 0{,}134 \text{ m}$$

I l'energia potencial és:

$$E_p = mgh = 1{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}134 = 1{,}97 \text{ J}$$

0,25 p. En aquest punt, la velocitat és nul·la; per tant, l'energia mecànica és:

$$E_m = E_c + E_p = 1{,}97 \text{ J}$$

0,25 p. Com que negligim el fregament, l'energia mecànica es conserva. En el punt més baix, $E_p = 0$; per tant, l'energia cinètica màxima és:

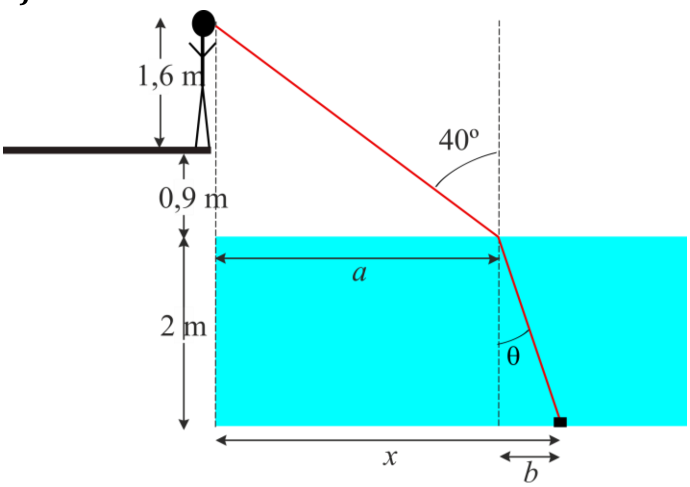
$$E_{c,max} = 1{,}97 \text{ J}$$

0,25 p. I la velocitat màxima és: $v = \sqrt{\frac{2\,E_{c,max}}{m}} = 1{,}62 \text{ m/s}$

Nota per als correctors: no s'ha de penalitzar l'estudiant que faci servir com a valor de *g* l'obtingut en l'apartat anterior.

EXERCICI 3, opció 2

a)



0,75 p. Primer, calcularem la distància b: Per fer això, hem de determinar l'angle θ a partir de la llei de Snell:

$$n_{aire}\sin(40^o) = n_{aigua} sin\theta \Rightarrow \theta = arcsin\left(\frac{n_{aire}\sin(40^o)}{n_{aigua}}\right) = arcsin\left(\frac{1\sin(40^o)}{1{,}33}\right)$$
$$= 28{,}9^o$$

0,2 p. I b *és*:

$$tan(\theta) = \frac{b}{2} \Rightarrow\ b = 2\,tan(\theta) = 1{,}10 \text{ m}$$

0,2 p. Fent servir la trigonometria, també obtenim a:

$$tan(40^o) = \frac{a}{1{,}6 + 0{,}9} \Rightarrow\ a = 2{,}5\,tan(40^o) = 2{,}10 \text{ m}$$

0,1 p. I, finalment:

$$x = a + b = 3{,}20 \text{ m}$$

b)

0,5 p. Perquè hi hagi reflexió total, l'angle d'incidència respecte de la normal ha de ser més gran o igual que l'angle límit. L'angle límit (o crític) és l'angle d'incidència respecte de la normal de la interfície pel qual l'angle de refracció és 90º. A partir de la llei de Snell:

$$n_{aigua} sin\theta_{lim} = n_{aire} sin 90^{o}$$

Per tant, l'angle límit és:

$$\theta_{lim} = arcsin\left(\frac{n_{aire}}{n_{aigua}}\right) = arcsin\left(\frac{1}{1{,}33}\right) = 48{,}75^{o}$$

0,25 p. La velocitat de propagació de la llum dins la piscina és:

$$v = \frac{c}{n_1} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

0,25 p. La longitud d'ona depèn del medi, però no la freqüència; per tant, podem determinar la freqüència a partir de la velocitat de la llum i la longitud d'ona al buit:

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{632{,}8 \cdot 10^{-9}} = 4{,}74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

0,25 p. I, finalment, la longitud d'ona dins de la piscina és:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2{,}26 \cdot 10^8}{4{,}74 \cdot 10^{14}} = 476 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 476 \text{ nm}$$

EXERCICI 4

a)

1,0 p. La reacció ha de complir la conservació del nombre màssic nuclear i, a més, ha de conservar la càrrega. Amb aquestes premisses, la reacció de desintegració és la següent:

$${}^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{131}_{54}Xe + {}^{x}_{y}? + ?$$

Es compleix la conservació del nombre màssic:

$$131 = 131 + x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

I per a la conservació de càrrega:

$$53 = 54 + y \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

Per tant, la partícula que busquem és un electró (${}^{0}_{-1}e$). A banda d'aquestes reaccions, per complir la conservació d'energia emeten neutrins, que, per conservar el nombre leptònic, hauria de tractar-se d'una antipartícula. Per tant, serà un antineutrí de la família electrònica. La reacció completa és:

$${}^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{131}_{54}Xe + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e$$

Alternativament es pot escriure ${}^{0}_{-1}\beta$ o e^- enlloc de ${}^{0}_{-1}e$.

Si no s'indica l'antineutrí, cal restar 0,25 p.

No cal que l'estudiant detalli les operacions relacionades amb la conservació de la càrrega i del nombre màssic. Són operacions molt senzilles que es poden fer de cap; per tant, només cal valorar si ha estat capaç de deduir correctament els diferents termes de la reacció.

0,25 p. Es tracta d'una desintegració β^-.

b)

0,5 p. L'activitat és el nombre de nuclis que es desintegren per unitat de temps:

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Necessitem el coeficient de desintegració λ que obtenim del temps de semidesintegració:

$A(t) = \frac{A_0}{2} = A_0\, e^{-\lambda t_{1/2}}$ i per tant, $t_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda}$.

I $t_{1/2} = 8{,}02$ dies $= 6{,}93 \cdot 10^5$ s.

Directament, obtenim $\lambda = \frac{ln2}{t_{1/2}} = \frac{ln2}{6{,}93 \cdot 10^5\ \mathrm{s}} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$.

Així, el nombre de nuclis és:

$$N = \frac{A(t)}{\lambda} = \frac{40 \cdot 10^6}{1{,}00 \cdot 10^{-6}} = 4{,}00 \cdot 10^{13}\ \text{nuclis}$$

I la quantitat de I-131:

$$m = 4{,}00 \cdot 10^{13}\ \text{nuclis}\ \frac{1\ \text{mol}}{6{,}022 \times 10^{23}\ \text{nuclis}} \frac{131\ \text{g}}{1\ \text{mol}} = 8{,}70 \cdot 10^{-9}\ \text{g}$$

0,25 p. L'activitat al cap d'una setmana ($t = 7$ dies $= 6{,}05 \cdot 10^5$ s) és:

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t} = 40 \cdot 10^6 e^{-1{,}00 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}05 \cdot 10^5} = 2{,}18 \cdot 10^7\ \text{Bq}$$

0,5 p. Representació gràfica correctament escalada, amb títols i unitats: