

4.

OPCIÓ A

a) Considerem els esdeveniments

A = la persona inscrita al congrés és una dona

U = la persona inscrita al congrés és docent d'universitat

S = la persona inscrita al congrés és docent de secundària

I = la persona inscrita al congrés és docent d'infantil o primària

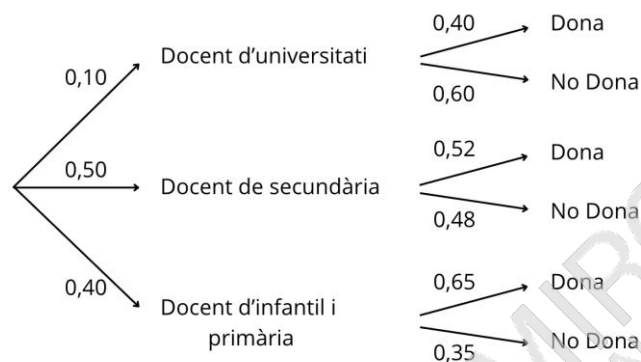
De l'enunciat del problema sabem que $P(U) = 0,1$, $P(S) = 0,5$ i $P(I) = 0,4$.

Sabem també que $P(A|U) = 0,4$, $P(A|S) = 0,52$ i $P(A|I) = 0,65$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$$P(A) = P(A \cap U) + P(A \cap S) + P(A \cap I) = P(U) \cdot P(A|U) + P(S) \cdot P(A|S) + P(I) \cdot P(A|I) = 0,1 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,52 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,56.$$

També es pot resoldre el problema a través d'un diagrama d'arbre



i realitzaríem el mateix càlcul. Així doncs, la probabilitat que sigui una dona és de 0,56.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que la persona inscrita sigui docent de secundària si sabem que és una dona. Per tant,

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S) \cdot P(A|S)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,52}{0,56} = 0,4643.$$

Així doncs, si escollim una dona inscrita a l'atzar, la probabilitat que sigui docent de secundària és de 0,4643.

b) Considerem les variables:

x : nombre de docents inscrits universitaris

y : nombre de docents inscrits de secundària

z : nombre de docents inscrits d'infantil i primària

Traduïm la informació de l'enunciat en equacions:

- El total de dones és 476: $0,4x + 0,52y + 0,65z = 476$.
- El 10% del total són docents d'universitat: $0,10(x + y + z) = x \rightarrow -0,9x + 0,1y + 0,1z = 0$.
- El 50% del total són docents de secundària: $0,50(x + y + z) = y \rightarrow 0,5x - 0,5y + 0,5z = 0$.

Si simplifiquem l'última equació i reordenem, obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -0,9x + 0,1y + 0,1z = 0 \\ 0,4x + 0,52y + 0,65z = 476 \end{cases}$$

El podem resoldre aplicant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -0,9 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,52 & 0,65 & 476 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0,92 & 0,25 & 476 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 & 476 \end{array} \right)$$

I obtenim $x = 85$, $y = 425$ i $z = 340$

Per tant, hi ha 85 docents universitaris, 425 de secundària i 340 d'infantil i primària.

Alternativament, també es pot resoldre l'exercici utilitzant l'apartat anterior. Sabem que la probabilitat que una persona inscrita sigui una dona és $P(A) = 0,56$. D'altra banda, si anomenem n el nombre d'inscrits, aquesta probabilitat també és igual a $P(A) = \frac{476}{n}$. D'aquí deduïm que hi ha $n = \frac{476}{0,56} = 850$ persones inscrites. Si apliquem que el 10% són docents universitaris, el 50% de secundària i la resta d'infantil i primària, obtenim que hi ha 85 docents universitaris, 425 de secundària i 340 d'infantil i primària.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Assignació d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la probabilitat que sigui una dona: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat que si escollim una dona sigui docent de secundària: 0,5 punts.
- b) Plantejament de les equacions del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema i solució final: 0,5 punts.

Si han utilitzat la resolució alternativa: 0,5 punts per obtenir el nombre total d'inscrits i 0,75 punts per obtenir el nombre d'inscrits de cada tipus.

OPCIÓ B

- a) Les previsions de l'organització són que al congrés hi acabin assistint 1000 persones, segons els percentatges de l'enunciat tindrem la distribució següent:
- Nombre de docents d'universitat: 10% de 1000 = 100
 - Nombre de docents de secundària: 50% de 1000 = 500
 - Nombre de docents d'infantil i primària: 40% de 1000 = 400

Així, els organitzadors hauran de comprar 100 detalls del tipus D1, 500 detalls del tipus D2 i 400 detalls del tipus D3.

Fent el següent producte de matrius, s'obté el preu de tots els detalls per a cada empresa

$$\begin{pmatrix} 100 & 500 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0,75 & 1 & 1,15 \\ 1 & 0,85 & 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 & 940 & 1020 \end{pmatrix}$$

Per tant, a l'empresa E1, els detalls costarien 900 €; a l'empresa E2, costarien 940 €, i a l'empresa E3, costarien 1020 €. L'empresa que ofereix el millor preu és l'empresa E1 amb un preu de 900 €.

- b) Sigui x , el nombre de vegades que s'aplica el descompte d'1 €. L'estudi es fa a partir de la hipòtesi que amb un preu de 80 euros es reservarien 100 habitacions dobles i que per cada euro que rebaixem el preu es reserven dues habitacions més.

La funció que dona els ingressos és el producte entre el preu de l'habitació doble i el nombre d'habitacions dobles reservades. Per tant, tenim

$$I(x) = (80 - x)(100 + 2x) = -2x^2 + 60x + 8000.$$

Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:

$$I'(x) = -4x + 60.$$

Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 15$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 15$ i és negativa per a $x > 15$.

Per tant, el preu de l'habitació doble per maximitzar els ingressos ha de ser de $80 - 15 = 65$ €.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Plantejar el producte de matrius: 0,25 punts. Realitzar el producte de matrius: 0,5 punts. Trobar l'empresa que ofereix el millor preu: 0,25 punts. Trobar el millor preu: 0,25 punts.
- b) Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x : 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu de l'habitació doble amb el qual els ingressos són màxims: 0,25 punts.

FORMACIOMIRO.COM
PART D'UN EXAMEN OFICIAL