

Exercici 3.

a) La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0,6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula:

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són:

$$\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,6229 - 1,96 \sqrt{\frac{0,6229(1-0,6229)}{350}} = 0,5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,6229 + 1,96 \sqrt{\frac{0,6229(1-0,6229)}{350}} = 0,6737$$

L'interval de confiança demanat és [57,21% , 67,37%], és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37%, amb una confiança del 95%.

b) Considerem els esdeveniments:

A = l'individu escollit és del poble A

B = l'individu escollit és del poble B

F = l'individu està a favor de la construcció del poliesportiu

Sabem que $P(A) = \frac{250}{425} = \frac{10}{17} = 0,5882$, $P(B) = \frac{175}{425} = \frac{7}{17} = 0,4118$.

Si sabem que l'individu és del poble A, la probabilitat que estigui a favor de la construcció del poliesportiu és:

$$P(F|A) = \frac{180}{250} = \frac{18}{25} = 0,7200.$$

D'altra banda, si sabem que l'individu és del poble B, la probabilitat que estigui a favor de la construcció del poliesportiu és:

$$P(F|B) = \frac{90}{175} = \frac{18}{35} = 0,5143.$$

Per tant, usant la fórmula de les probabilitats totals, tenim que la probabilitat que l'individu estigui a favor de la construcció del poliesportiu és:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap A) + P(F \cap B) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) = \frac{18}{25} \cdot \frac{10}{17} + \frac{18}{35} \cdot \frac{7}{17} \\ &= \frac{54}{85} = 0,6353. \end{aligned}$$

Així doncs, la probabilitat que l'individu estigui a favor de la construcció del poliesportiu és de 0,64.

Ara ens demanen:

$$P(A|F) = \frac{P(F|A) \cdot P(A)}{P(F)} = \frac{\frac{18}{25} \cdot \frac{10}{17}}{\frac{54}{85}} = \frac{2}{3} = 0,6667.$$

La probabilitat que l'individu sigui del poble A, si sabem que està a favor de la construcció del poliesportiu, és de 2/3.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

- a) Càlcul de la proporció mostral: 0,25 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.
- b) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts. Fórmula de la probabilitat total: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,25 punts. Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.