2. a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A' respectivament, són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}0 & 1 & -1\\ p^2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}p+3\\ 5\\ 3\end{matrix}\end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc, calculem el determinant de A:

$$|A| = \begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ p^2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 0 + p^2 - 1 = p^2 - 1.$$

Igualant-lo a zero, en resulten els valors $p = 1$ i $p = -1$. Per tant, distingim els casos següents:

- Si $p \neq 1, -1$, el determinant de A és diferent de zero i, per tant, $rang(A) = rang(A') = 3$, que és igual al nombre d'incògnites. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat.
- Si $p = 1$, el determinant de la matriu de coeficients és zero; com que tenim el menor $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$, aleshores $rang(A) = 2$. Però la matriu ampliada té $rang(A') =$

Per tant, el sistema és incompatible.

- Si $p = -1$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Eliminant la segona equació (per ser suma de la primera i la tercera), i com que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ té rang 2, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Per al cas $p = -1$, es tracta del sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - y = 3, \end{cases}$$

que és compatible indeterminat. Fent $y = \lambda$, s'obté $x = \lambda + 3$ i $z = \lambda - 2$. Per tant la solució del sistema és, en aquest cas, $(x, y, z) = (\lambda + 3, \lambda, \lambda - 2)$, amb λ real.

c) Per al cas $p = -1$, el sistema té les infinites solucions obtingudes a l'apartat anterior. Imposant, a més, que $xy = 10$, resulta $(\lambda + 3)\lambda = 10$; és a dir, $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$; d'aquí obtenim:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5, 2.$$

Per tant, el sistema té exactament dues solucions complint $xy = 10$, que són les corresponents a $\lambda = -5$ i $\lambda = 2$. Es tracta de $(x, y, z) = (-2, -5, -7)$ i $(x, y, z) = (5, 2, 0)$, respectivament.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 punts pel càlcul del determinant; 0,25 p. per determinar els valors crítics de p, i 0,25 p. per la discussió de cadascun dels tres casos. **b)** Compteu 0,5 punts pel càlcul correcte del conjunt de solucions (evidentment, poden triar qualsevol de les variables com a lliure). **c)** Compteu 0,25 p. pel plantejament de l'equació quadràtica; 0,25 p. per la seva resolució, i 0,25 p. pel càlcul dels dos punts resultants.

Comentaris: hi ha altres maneres de discutir i resoldre el sistema d'equacions. Compteu-les bé en la mesura que ho facin correctament i de manera justificada.