3. a) Considerem els successos aleatoris següents:

$$A = \text{"}la\ peça\ escollida\ és\ d'acer\text{"},$$
$$F = \text{"}la\ peça\ escollida\ és\ de\ ferro\text{"},$$
$$D = \text{"}la\ peça\ escollida\ és\ defectuosa\text{"}.$$

De les dades de l'enunciat tenim $P(F) = 0{,}6$, $P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(D|F) = 0{,}05$, $P(D|A) = 0{,}03$. Per la llei de probabilitats totals, la probabilitat que una peça sigui defectuosa és:

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|A)P(A) = 0{,}05 \cdot 0{,}6 + 0{,}03 \cdot 0{,}4 = 0{,}042.$$

b) Anomenem X el nombre de peces defectuoses en un paquet. De l'enunciat deduïm que X segueix una llei binomial amb $n = 5$ i probabilitat p. Per tant, la probabilitat que en un paquet hi hagi exactament quatre peces defectuoses és:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 (1 - p) = \frac{5!}{4!} p^4 (1 - p) = 5\, p^4 (1 - p) = 5(p^4 - p^5).$$

També podem argumentar directament sense fer servir la llei binomial. Com que hi ha quatre peces defectuoses, n'hi haurà exactament una que no ho és. La probabilitat que una en concret (per exemple, la primera) sigui bona i les altres quatre defectuoses és $(1 - p)p^4$. Com que hi ha cinc possibilitats per escollir quina és la peça bona, $P(X = 4) = 5(1 - p)p^4 = 5(p^4 - p^5)$.

c) Busquem els extrems relatius de la funció $f(p) = 5(p^4 - p^5)$.

$$f'(p) = 5(4p^3 - 5p^4) = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \qquad p = \frac{4}{5}.$$

Observem que $f(0) = 0$ i que $f\left(\frac{4}{5}\right) > 0$. Mirem el signe de la segona derivada:

$$f''(p) = 5(12p^2 - 20p^3) \;\rightarrow\; f''\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(12\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 20\left(\frac{4}{5}\right)^3\right) < 0.$$

i deduïm que a $p = \frac{4}{5}$ la funció $f(p)$ assoleix un màxim local. Com que per $p \in (0, \frac{4}{5})$ la funció creix i per $p > \frac{4}{5}$ la funció decreix, es tracta d'un màxim absolut quan p és no negativa. I el valor màxim serà $f\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right) = 0{,}41$.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 punts per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer l'arbre de decisió o similar); 0,25 p. per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 p. pel càlcul concret. **b)** Compteu 0,5 punts pel plantejament i 0,25 p. pel càlcul. **c)** Compteu 0,25 punts pel càlcul de la derivada i els punts crítics, 0,5 p. per argumentar que el màxim absolut en $p > 0$ es troba a $p = 4/5$, i 0,25 p. per trobar el valor d'aquest màxim.