4. OPCIÓ A. La vela ocupa la regió compresa entre les corbes $y = 0$, $x = 0$, i $y = -x^2 + 25$. Per calcular el cost total, caldrà calcular separadament l'àrea de la regió superior i l'àrea de la regió inferior i multiplicar-les cadascuna pel preu del material respectiu (niló o polièster).

Trobem primer els punts de tall entre les funcions involucrades: el punt de tall de $y = -x^2 + 25$ amb la part positiva de l'eix d'abscisses és:

$$y = 0 \;\longrightarrow\; -x^2 + 25 = 0 \;\longrightarrow\; x = 5.$$

L'abscissa positiva del punt de tall entre les corbes $y = -x^2 + 25$ i $y = 9$ és

$$-x^2 + 25 = 9 \;\longrightarrow\; -x^2 = -16 \;\longrightarrow\; x = 4.$$

L'àrea total sota la corba $y = -x^2 + 25$ entre els extrems $x = 0$ i $x = 5$ és

$$A_{total} = \int_0^5 (-x^2 + 25)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 25x\right]_0^5 = \frac{-125}{3} + 125 - 0 = \frac{250}{3}\ u^2.$$

L'àrea de la regió inferior és:

$$\begin{aligned} A_{inf} &= \int_0^4 9dx + \int_4^5 (-x^2 + 25)\, dx = 9 \cdot 4 + \left[\frac{-x^3}{3} + 25x\right]_4^5 = \\ &= 36 + \left(-\frac{125}{3} + 125\right) - \left(-\frac{64}{3} + 100\right) = 36 + \frac{14}{3} = \frac{122}{3}\ u^2. \end{aligned}$$

Finalment, l'àrea de la regió superior és la diferència:

$$A_{sup} = A_{total} - A_{inf} = \frac{250}{3} - \frac{122}{3} = \frac{128}{3}\ u^2.$$

Així doncs, el cost total de la vela serà:

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts pels punts de tall; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió inferior, i 0,5 p. pel càlcul; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió superior, i 0,5 p. pel càlcul, i, finalment, 0,25 p. pel càlcul del cost final.

Comentaris: hi ha altres maneres de plantejar el càlcul de les dues àrees. Compteu-les bé si ho fan correctament i de manera justificada.

4. OPCIÓ B. a) El pla π' que busquem té vectors directors $(1,1,0)$ i $\overrightarrow{PQ} = (3,\,-3,6) - (1,-1,2) = (2,-2,4) \sim (1,\,-1,2)$. Fent-lo passar pel punt P, serà el pla d'equació:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2 - z + 2 - z + 2 - 2y - 2 = 0$$

és a dir, $2x - 2y - 2z = 0$; o, simplificant, $x - y - z = 0$.

b) La recta que ens demanen és la intersecció del pla π' amb el pla perpendicular a $\overrightarrow{PQ} \sim (1,-1,2)$ que passa pel punt mig:

$$M = \frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(4,-4,8) = (2,-2,4).$$

Aquest pla té equació $x - y + 2z = D$ amb $D = 2 - (-2) + 2 \cdot 4 = 12$; és a dir, $x - y + 2z = 12$. Per tant, la recta demanada és:

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 12 \end{aligned}\right\}.$$

Com que restant obtenim $z = 4$, es tracta de la recta:

$$(x,y,z) = (k+4,k,4) = (4,0,4) + k(1,1,0).$$

Criteris de correcció: a) Compteu 0,5 punts per plantejar correctament el problema i 0,5 pel càlcul de l'equació. **b)** Compteu 0,75 p. per calcular l'equació del pla perpendicular a $\overline{PQ}$ passant pel punt mig, i 0,75 p. per l'equació paramètrica de la recta intersecció amb π'.