

3. (a) Calculem primer la probabilitat que les dues boles tinguin la mateixa lletra. Això només pot passar si són dues A o dues S.

$$P(\text{dues A}) = P(\text{primera A i segona A}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(\text{dues S}).$$

Per tant, $P(\text{dues diferents}) = 1 - P(\text{dues iguals}) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944 \dots$

Alternativament, ho podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues lletres són diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$P(\text{dues diferents})$

$$\begin{aligned} &= P(\text{primera no és ni A ni S}) + P(\text{primera A i segona no A}) \\ &+ P(\text{primera S i segona no S}) = \\ &= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

FORMACIOMIRO.COM
PART D'UN EXAMEN OFICIAL

(b) El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$. Passant al complementari, tenim

$$P(\text{almenys 2 A}) = 1 - P(\text{una A}) - P(\text{cap A}) = 1 - \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 = \\ = 0.308 \dots$$

(c) Si derivem la funció i la igulem a zero,

$$f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2 \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4}, \quad f''(e) = 2 \frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

Com que només té un màxim, la funció és creixent en l'interval $(0, e)$ i decreixent en $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (c) Compteu 0,5 pel càlcul de la derivada, 0,25 per determinar el màxim i 0,25 per les zones de creixement i decreixement.

Comentaris: És un mètode més llarg però a l'apartat (b) es pot respondre també calculant amb la binomial $P(2A) + P(3A) + P(4A) + P(5A)$; doneu també aquestes respostes com a correctes si estan ben argumentades.