4A. (a) El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,3) - (1,2,3) = (-4,-4,0) \sim (1,1,0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mig $\frac{1}{2}(A + B) = (-1,0,3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B. Efectivament, per un punt arbitrari $P = (x, y, z)$, l'equació $d(P, A) = d(P, B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\ = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9, \end{aligned}$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π, $x + y + 1 = 0$.

(b) Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$$d(A,\pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad d(B,\pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mig $\frac{1}{2}(A+B) = (-1,0,3)$ per on hem fet passar el pla π, perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

(c) El punt $C = (-7,6,3)$ compleix $-7+6+1=0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C,A) = d(C,B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isósceles.

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A,B) = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mig entre A i B:

$$h = d\big((-7,6,3),(-1,0,3)\big) = \sqrt{6^2+6^2+0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per calcular l'equació del pla π, i 0,5 per justificar que es tracta dels punts equidistants de A i de B. (b) Compteu 0,25 per calcular una distància, 0,25 per l'altra, i 0,25 per justificar que no és casualitat que donin el mateix resultat. (c) Compteu 0,25 per raonar que el triangle és isòsceles, 0,25 per calcular la base i 0,25 per calcular l'alçada.

4B. (a) Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3, és a dir, $3x\cdot x\cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció ve donat per

$$C(x) = 30\cdot(3xh + xh + xh) + 50\cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 =$$

$$= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

(b) Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resolem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel planteig correcte de les variables (amplada, fondària i alçada), 0,5 per expressar la lligadura que representa el volum fixat, i 0,5 per l'expressió final del cost. (b) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per aïllar correctament, 0,25 per justificar que es tracta d'un mínim, 0,25 per les tres dimensions demanades, i 0,25 pel càlcul del cost total.

Comentaris: Poden plantejar que l'amplada és $\boldsymbol{x}$ i la fondària $\frac{x}{3}$; els càlculs seran diferents però doneu els punts corresponents de cada part sempre que estigui ben feta i ben argumentada. La justificació que es tracta d'un mínim pot fer-se també sense la derivada segona, analitzant el signe de la derivada primera; compteu-ho bé si ho fan així, sempre que estigui ben argumentat.