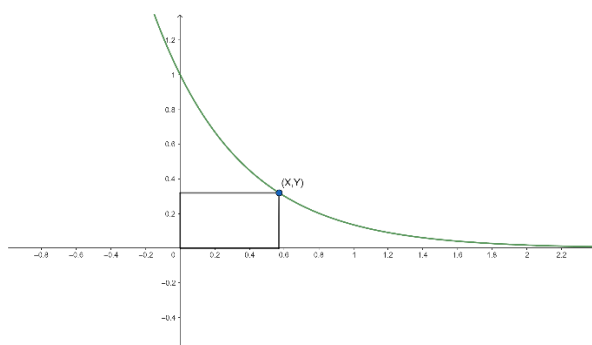


5.

(a) La gràfica de la funció $y = e^{-2x}$ està esbossada en el dibuix següent, juntament amb un dels rectangles descrits a l'enunciat:



Com que un qualsevol d'aquests rectangles mesura x de base i e^{-2x} d'alçada, la seva àrea és $A(x) = xe^{-2x}$. Busquem els extrems relatius d'aquesta funció:

$$A'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1 - 2x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

A partir del signe de la funció derivada es veu clarament que $A(x)$ és creixent per a $x < \frac{1}{2}$ i decreixent per a $x > \frac{1}{2}$. Per tant, el punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim absolut de $A(x)$. Així, el rectangle d'àrea màxima correspon al de costats $x = \frac{1}{2}$ i $y = e^{-2 \cdot (\frac{1}{2})} = \frac{1}{e}$, i té àrea $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e} u^2$.

(b) La derivada d'aquesta funció és $y' = -2e^{-2x}$. El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 0 és $y'(0) = -2e^0 = -2$. Com que $y(0) = e^0 = 1$, la recta tangent serà la d'equació $y - 1 = -2(x - 0)$, és a dir, $y = -2x + 1$. El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses és $x = \frac{1}{2}$, és a dir, el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per escriure la funció àrea, 0.25 per derivar-la, 0.25 per trobar el punt crític, 0.5 per justificar que es tracta d'un màxim, i 0.25 per calcular l'àrea màxima. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.5 per l'equació de la recta tangent, i 0.25 pel punt de tall.

Comentaris: La justificació del màxim es pot fer també via derivada segona. Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, en la mesura que siguin correctes i estiguin ben explicades.