1. a) Tenint en compte que la recta r ha de passar pel punt $P = (1,1)$ i que m és el seu pendent, la recta r té per equació $y - 1 = m(x - 1)$. La mida de la base del triangle és l'abscissa del punt d'intersecció de la recta r amb l'eix OX

$$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \ 0 - 1 = m(x-1) \rightarrow x = \frac{m-1}{m}.$$

I l'alçada del triangle és l'ordenada del punt d'intersecció de la recta r amb $y = 3x$:

$$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow \ 3x - 1 = m(x-1) \ \rightarrow \ x = \frac{m-1}{m-3}, \ \ y = 3 \cdot \frac{m-1}{m-3}.$$

La funció a minimitzar és la que calcula l'àrea del triangle:

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot 3 \cdot \frac{m-1}{m-3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}.$$

Parlant estrictament el valor de l'àrea és $A(m) = |\frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}|$ perquè hi ha valors de m per als quals aquesta expressió és negativa. No tingueu en compte si ignoren aquest detall.

b) Derivem la funció àrea i igualem a zero per trobar els possibles extrems relatius:

$$A'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2m-2)(m^2-3m)-(m^2-2m+1)(2m-3)}{(m^2-3m)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2-2m+3}{(m^2-3m)^2} = 0,$$

$$-m^2 - 2m + 3 = 0 \ \rightarrow \ \ m = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-1)3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = 1, -3.$$

Per comprovar si són màxims o mínims fem la segona derivada:

$$A''(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-2m-2)(m^2-3m)^2 - (-m^2-2m+3)2(m^2-3m)(2m-3)}{(m^2-3m)^4},$$

i, com que $A''(-3) = \frac{1}{54} > 0$ i $A''(1) = -\frac{3}{2}$<0, el mínim correspon a $m = -3$ (segons l'esbós, el pendent ja ha de ser negatiu).

Alternativament, podem estudiar el creixement i decreixement de la funció $A(m)$. Aquests venen donats pel signe de la primera derivada, però com que aquesta té un quadrat al denominador, dependrà només del signe del numerador $-m^2 - 2m + 3$. Això és una paràbola oberta cap avall i que talla l'eix OX en els punts (-3,0) i (1,0); així doncs, per a $m < -3$, la derivada és negativa i la funció decreix, i per $-3 < m < 1$, la derivada és positiva i la funció creix, per la qual cosa en $m = -3$, l´àrea és mínima. El valor d'aquesta àrea és:

$$A(-3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-3)^2 - 2(-3) + 1}{(-3)^2 - 3(-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{18} = \frac{4}{3}\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per l'equació del feix de rectes; 0,25 per la mida de la base del triangle; 0,25 per l'alçada, i 0,25 pel càlcul de l'àrea (tot en funció de m). **(b)** Compteu 0,5 per la derivada; 0,25 per calcular els punts crítics; 0,5 per justificar el mínim, i 0,25 per calcular el valor de l'àrea.