

3. a) Considerem els esdeveniments aleatoris

$$I = \text{``practicar un esport d'impacte''}, \\ S = \text{``patir sesamoïditis''}.$$

De les dades de l'enunciat sabem que $P(I) = 0,45$, $P(\bar{I}) = 1 - 0,45 = 0,55$, $P(S|I) = 0,1$, i $P(S|\bar{I}) = 0,03$. Per la llei de les probabilitats totals, tenim:

$$P(S) = P(S|I)P(I) + P(S|\bar{I})P(\bar{I}) = 0,1 \cdot 0,45 + 0,03 \cdot 0,55 = 0,0615.$$

b) Per la fórmula de Bayes:

$$P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)} = \frac{0,1 \cdot 0,45}{0,0615} \approx 0,7317 \dots$$

c) El primer any s'obtenen el màxim de beneficis, per tant $x = 1$ és un màxim de la funció i $f'(1) = 0$; i aquests beneficis obtinguts són de 8.000 €, per tant, $f(1) = 8$. També ens diuen que el segon any hi va haver un punt d'inflexió en els beneficis, per tant, $f''(2) = 0$. Calculem la primera i segona derivades de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ i imposem aquestes tres condicions:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \\ f''(x) = 6ax + 2b,$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f(1) = 8 \Rightarrow a + b + c = 8 \\ f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \end{array} \right\}$$

Restant les dues primeres equacions, obtenim $2a + b = -8$ i, combinant amb la tercera:

$$\left. \begin{array}{l} 12a + 2b = 0 \\ 2a + b = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12a + 2b = 0 \\ -4a - 2b = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{16}{8} = 2.$$
$$\frac{8a = 16}{8a = 16}$$

Per tant, $2 \cdot 2 + b = -8$, d'on $b = -12$. Finalment,

$$a + b + c = 8 \Rightarrow c = 8 - a - b = 8 - 2 + 12 = 18.$$

La funció que compta els beneficis d'aquesta empresa és, doncs, $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer un arbre de decisió o similar); 0,25 per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,25 per plantejar correctament la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. (c) Compteu 0,25 per imposar $f'(1) = 0$, 0,25 per imposar $f(1) = 8$, 0,25 per imposar $f''(2) = 0$ i 0,25 pel càlcul final.