4. OPCIÓ A. a) Com que $3\sin(\frac{0}{4}) = 0$ i $3\cos(\frac{0}{4}) = 3$, la gràfica inferior (la que passa pels punts A i C) és la del sinus, i la superior (la que passa per B i C) és la del cosinus. El punt B correspon al valor de $3\cos(\frac{0}{4}) = 3$, per tant és el punt $B = (0{,}3)$. Finalment, el punt C és el punt de tall entre el sinus i el cosinus, $3\sin(\frac{x}{4}) = 3\cos(\frac{x}{4})$,

$$\frac{3\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{3\cos\left(\frac{x}{4}\right)} = 1 \longrightarrow \tan\left(\frac{x}{4}\right) = 1 \longrightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = \pi.$$

Com que $3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, el punt de tall és $C = \left(\pi, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Per a calcular el preu del vitrall necessitem trobar la seva àrea:

$$A = \int_0^{\pi} \left(3\cos\left(\frac{x}{4}\right) - 3\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right) dx = \left[12\sin(\frac{x}{4}) + 12\cos(\frac{x}{4})\right]_0^{\pi}$$
$$= 12\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos(0)\right) = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right)$$
$$= 12(\sqrt{2} - 1) \simeq 4{,}97\ m^2.$$

Per tant, el preu del vitrall serà de $4{,}97\ m^2 \cdot 750\,\frac{€}{m^2} = 3.725{,}5$ €.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per raonar quina gràfica és cadascuna; 0,25 per les coordenades del punt B, i 0,25 per les de C. **(b)** Compteu 0,25 per plantejar la integral correctament; 0,5 per la primitiva; 0,5 per trobar l'àrea, i 0,25 pel preu final. Compteu 0 de la part de la primitiva si no tracten adequadament el coeficient del sinus i del cosinus.

4. OPCIÓ B. a) Només cal aplicar la fórmula de la distància punt-pla per comprovar que

$$d(P,\pi) = \frac{|2\cdot 0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Tot pla paral·lel a π és de la forma $2x - y + z = D$ per algun D real. Com que volem que passi pel punt P tenim

$$2\cdot 0 - 1 + 3 = D$$

i, per tant, $D = 2$. El pla buscat és $\pi_1: 2x - y + z = 2$. Clarament la distància entre π_1 i π és $d(\pi_1, \pi) = d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

c) Per trobar un segon pla π_2 també paral·lel a π i que també estigui a distància $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π, buscarem el punt simètric, P', de P respecte al pla π. Busquem la recta perpendicular a π que passa pel punt P. L'equació paramètrica d'aquesta recta és

$$r: (x, y, z) = (0,1,3) + \lambda \cdot (2, -1, 1) = (2\lambda, 1 - \lambda, 3 + \lambda).$$

Busquem el punt d'intersecció M de la recta r amb el pla π:

$$2\cdot(2\lambda) - (1 - \lambda) + 3 + \lambda = 5$$
$$6\lambda = 3$$
$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Per tant, $M = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Ara ens cal trobar el punt simètric P' de P respecte de π, fent per exemple $P' = P + 2\overrightarrow{PM} = (0,1,3) + 2 \cdot \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, 0, 4)$.

Finalment el pla buscat és de la forma $2x - y + z = E$ per algun E real i passa per P', així doncs,

$$2 \cdot 2 - 0 + 4 = E,$$

i $E = 8$. Tenim doncs que π_2 és el pla d'equació $2x - y + z = 8$.

Alternativament, també poden plantejar l'equació de la distància d'un pla paral·lel genèric, a un punt qualsevol de π i demanar que sigui $\sqrt{6}/2$. Una solució serà el π_1 i l'altra el pla buscat π_2. Compteu bé aquesta manera alternativa si està ben justificada i calculada.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per la comprovació que la distància és la que diu l'enunciat (inclosa la simplificació de la fracció amb arrels). **(b)** Compteu 0,5 per l'equació del pla paral·lel i 0,25 per argumentar que la distància és la mateixa. **(c)** Compteu 0,5 pel càlcul de la projecció, 0,5 pel càlcul del punt simètric, i 0,25 per l'equació final del pla.