Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

- En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
- La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
- En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
- **Penalització per errades de càlcul:**
    - Si l'errada de càlcul que es comet no té més trascendència, aleshores es descomptarà 0,125 punts de la puntuació parcial que correspongui.
    - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà la penalització fruit de l'errada (0,125 punts).
    - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima serà la parcial corresponent i es descomptaran els 0,125 punts.
    - Si la resolució d'un apartat conté dues errades es descomptaran 0,25 punts del que s'estigui resolent i no es valorarà la resta de l'apartat. En cap cas un apartat tindrà una puntuació negativa.

1. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix A^{-1}.

[1 punt]

b) Calculeu A^{-1} per a $a = 0$.
[1 punt]

Resolució:

a) Per a que existeixi la inversa de la matriu A cal que el determinant sigui diferent de zero.

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 1 - 2a + a^2.$$

Resolem l'equació $a^2 - 2a + 1 = 0$ i obtenim $a = 1$. Per tant,el determinant és diferent de zero, i aleshores $\boxed{\text{la matriu és invertible, sempre que } a \text{ sigui diferent de 1}}$.

b) Quan $a = 0$ la matriu A és igual a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}) = 1.$$

I per tant,

$$\boxed{A^{-1}} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament inicial de no anul·lar el determinant.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pel plantejament de l’equació de segon grau.

0,25 punts per la solució final.

Apartat b)

0,25 punts per la substitució i el determinant

0,25 punts per la fórmula de la inversa.

0,25 punts pels adjunts.

0,25 punts pel càlcul final.

2. A l'espai tridimensional considerem la recta $r\colon (x,y,z) = (3+2\alpha, -\alpha, 3-\alpha)$ i els plans $\pi_1 : x+y+z=-1$ i $\pi_2 : (x,y,z) = (2+\lambda, 1-\lambda+\mu, \mu)$.

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que te la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla π_2.

[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta r que equidisten dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades $(\mathrm{x_0}, \mathrm{y_0}, \mathrm{z_0})$ al pla d'equació
$\mathrm{Ax+By+Cz+D=0}$ amb l'expressió $\frac{|\mathrm{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{\mathrm{A^2+B^2+C^2}}}$.

Resolució:

a) Per a escriure π_2 en forma general o cartesiana fem

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ (x-2)(-1) + z - (y-1) = 0, \ -x+2+z-y+1=0$$

Per tant l'equació cartesiana del pla és $\boxed{x+y-z=3}$.

b) La distància d'un punt de r de la forma $P=(3+2\alpha, -\alpha, 3-\alpha)$ a π_1 i π_2 ha de ser la mateixa, és a dir

$$\frac{|3+2\alpha-\alpha+3-\alpha+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|3+2\alpha-\alpha-3+\alpha-3|}{\sqrt{3}}$$

$$|7| = |2\alpha-3| \ \Rightarrow \ \begin{cases} 2\alpha-3=7 \to \ \alpha=5 \\ 2\alpha-3=-7 \to \ \alpha=-2 \end{cases} \Rightarrow \ \boxed{\begin{array}{l} P_1=(13,-5,-2) \\ P_2=(-1,2,5) \end{array}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la formulació de l'equació cartesiana del pla a partir del determinant o del càlcul del vector normal.

0,5 punts pel càlcul final.

Apartat b)

0,25 punts per la igualtat entre distàncies a partir de la fórmula.

0,25 punts pel primer desenvolupament.

0,25 punts per l'obtenció d'un dels punts.

0,25 punts per l'obtenció del segon punt.

3. Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l’interval [0, 2].

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l’interval [0, 2], i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

Resolució:

a) Observem que la funció f és contínua en tot el seu domini ja que és combinació lineal de funcions contínues com l’exponencial i els polinomis. És suficient observar que $\left.\begin{array}{r} f(0) = e^0 - 0 + 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0 \end{array}\right\}$ i per tant per continuïtat en l’interval [0, 2] i aplicant el Teorema de Bolzano hi haurà algun punt a (0, 2) en el qual la funció s’anul.la com l’enunciat ens demana que demostrem.

b) La derivada de la funció f és $f'(x) = e^x - 1$. Observem que *f’* s’anul·la únicament per a x = 0 i que és estrictament positiva a l’interval (0, 2], ja que $e^x > 1$ quan $x > 0$. Per tant la funció f és creixent en l’interval [0, 2] i aleshores prendrà el mínim absolut en l’extrem inferior, x = 0, i el màxim absolut en l’extrem superior, x = 2, de l’interval.
Així doncs tindrem: $\boxed{\text{mínim absolut } m = (0, -1) \text{ i màxim absolut } M = (2, e^2 - 4)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l’argument de continuïtat de la funció.

0,25 punts pels càlculs de *f*(*0*) i *f*(*2*).

0,5 punts per l’aplicació del Teorema de Bolzano.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de la funció derivada.

0,25 punts pel signe de la funció derivada i la deducció de la monotonia.

0,25 punts pel punt *m*. (ambdues coordenades)

0,25 punts pel punt *M*. (ambdues coordenades)

4. Siguin els plans de R^3 $\pi_1\colon -y+z=2$, $\pi_2\colon -2x+y+z=1$ i $\pi_3\colon 2x-2z=-1$.

a) Calculeu la posició relativa dels tres plans.

[1 punt]

b) Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

Resolució:

a) Plantegem el sistema d'equacions lineals format pels tres plans i estudiem l'existència de solucions. La matriu del sistema queda

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad 0 \quad -2}_{A} & & & -1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem el determinant de la matriu de coeficients. $\det(A)=-2-2+4=0$, per tant tenim que $rang(A)<3$ però com que el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ és no nul tenim que $rang(A)=2$.

Per a saber el rang de la matriu ampliada orlem el menor amb la tercera fila i la columna dels termes independents i com que $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2-4+2=-4\neq 0 \Rightarrow$ $rang(A')=3\neq rang(A)$ i per tant el sistema és incompatible, és a dir, el tres plans no tenen cap punt en comú.

Observem també que els plans no són paral·les dos a dos, ja que els vectors normals no són proporcionals.

Per tant, els tres plans es tallen dos a dos però no tenen cap punt en comú.

b) La recta definida pels plans π_1 i π_2 és $r\colon\begin{cases} -y+z=2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$ que té per vector director el producte vectorial dels vectors normals de cada pla, és a dir

$$v_r = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 0 & -2 \\ j & -1 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,-2) \equiv (1,1,1)$$

Per a comprovar que el pla π_3 és paral·lel a la recta r és suficient comprovar que el seu vector normal, $n_3 = (2,0,-2)$, és perperdicular amb $v_r = (1,1,1)$. I efectivament

$$n_3 \times v_r = 2 + 0 - 2 = 0 \;\Rightarrow \boxed{r || \pi_3}$$

Observació: El paral·lelisme de l'apartat b) també es pot demostrar argumentant que π_3 no pot tallar la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, ja que si fos així aleshores hi hauria un punt en comú a tots tres plans, que no pot ser pel resultat de l'apartat a).

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament a partir de l'existència de solucions del sistema

0,25 punts pel càlcul dels rangs.

0,25 punts pel no tenir cap punt en comú.

0,25 punts pel no paral·lelisme

Apartat b)

0,25 punts pel vector director de *r*.

0,25 punts pel vector normal del pla.

0,25 punts pel plantejament de l'ortogonalitat entre els vectors.

0,25 punts pel càlcul final.

5. Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

Resolució:

a) Si dibuixem la diagonal del rectangle (que és el diàmetre de la circumferència), pel Teorema de Pitàgoras tenim la relació $x^2 + y^2 = 2^2$. Per tant, $y = +\sqrt{4 - x^2}$.

Aleshores la superfície $x \cdot y$, en funció només de la variable x la podem escriure

$$\boxed{S(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x^2 - x^4}}$$

com volíem comprovar.

b) Pel caràcter monòton de la funció arrel quadrada, el valor de x on la superfície sigui màxima és el mateix que aquell per al qual es maximitza el radicant. Per tant, maximitzarem el radicant, $r(x) = 4x^2 - x^4$, que és més senzill.

Els candidats a màxim seran els punts que anul·lin la derivada primera. Fem les derivades i igualem a zero la derivada primera.

$r(x) = 4x^2 - x^4$
$r'(x) = 8x - 4x^3$
$r''(x) = 8 - 12x^2$

De la igualtat $r'(x) = 0$ tenim $4x(2 - x^2) = 0$ d'on obtenim $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.
Pel context del problema $x = -\sqrt{2}$ no té sentit i pel cas $x = 0$ obtenim $S(0) = 0$ que tampoc no és màxim. Així doncs, l'única solució possible és $x = \sqrt{2}$.

Comprovem que efectivament és un màxim substituint en la derivada segona:
$r''(\sqrt{2}) = 8 - 12(\sqrt{2})^2 = 8 - 24 < 0$ i per tant efectivament $\boxed{\text{en } x = \sqrt{2} \text{ la superfície és màxima}}$.

El valor de la mesura y serà $\boxed{y = \sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}}$.
Observem que es tracta d'un quadrat.

$\boxed{\text{El valor màxim és } S(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \text{ unitats quadrades.}}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l'equació de condició (Teorema de Pitàgoras)

0,25 punts per l'expressió de y en funció de x.

0,25 punts per la fórmula de la superfície en termes de x i y.

0,25 punts per la substitució i càlcul final.

Apartat b)

0,25 punts per les derivades.

0,25 punts pel plantejament d'anul·lar la derivada primera.

0,25 punts per la solució de $S'(x) = 0$ i verificació del màxim.

0,25 punts per les dues mesures i la superfície màxima.

---

6. Trobeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d’elles mateixes, és a dir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Resolució:

Per tal que la matriu sigui inversa d’ella mateixa s’haurà de complir que $A \cdot A = I$, és a dir la següent igualtat

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant s’ha de resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{ccc} a^2 & = & 1 \\ ab + b & = & 0 \end{array}\right\}$$

La primera equació ens porta a $a = \pm 1$ del que se’n deriven dos casos possibles.

- $a = 1$

La segona equació queda $b+b = 0$, és a dir $2b=0$, per tant $b = 0$ i aleshores la matriu resultant és la identitat, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $a = -1$

La segona equació queda $-b+b=0$, que es compleix independent del valor de b. Així doncs, la matriu resultat és de la forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, per a qualsevol valor de b.

En resum les matrius sólució són:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ per a qualsevol valor del paràmetre b.

Pautes de correcció:

0,5 punts pel producte matricial.

0,25 punts per l'obtenció del sistema d'equacions.

0,25 punts per a les solucions de a

0,5 punts cas $a = 1$.

0,5 punts cas $a = -1$.