

B.2.

a) La gráfica de la función $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ es una parábola invertida, con valor $f(0) = 2 > 0$, luego se anula en dos valores digamos $a < 0$, $b > 0$. Así la función $h(x)$ será $f(x)$ si $x \in (a, b)$ y $-f(x)$ en otro caso. Por ser ambas expresiones polinómicas, la función $h(x)$ es derivable en todos los puntos salvo quizás en los puntos críticos $x = a$ o $x = b$. Para ser derivable en estos valores ha de ocurrir que coincidan las derivadas de $f(x)$ y $-f(x)$ en ellos. Se tiene que $f'(x) = 2 - 4x$ y $(-f(x))' = -(f'(x)) = 4x - 2$ solo coinciden si $x = \frac{1}{2}$. Como $f(1/2) = 2 + 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} \neq 0$ se deduce que la función $h(x) = |f(x)|$ es derivable en todos los puntos salvo en las dos raíces de $2 + 2x - 2x^2$ que son $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

b) La función diferencia $f(x) - g(x)$ es $2 + 2x - 2x^2 - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) = 2x(x + 4)(1 - x)$, que es positiva en $(0, 1)$ y negativa en $(1, 2)$. Así

$$\int_0^2 |(f(x) - g(x))| dx = \int_0^1 (8x - 6x^2 - 2x^3) dx + \int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = 11.$$